

6.1. Две команды проводили между собой конкурс, состоящий из 13 заданий. За победу в любом задании команда получала 3 очка, за ничью — 2 очка, за поражение — 1 очко. Одна из команд набрала 25 очков. Выиграла она в конкурсе или проиграла? Ответ обоснуйте.

6.2. От шоссе к четырём поселкам A , B , C , D последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге–шоссе–дороге от A до B равен 9 км, от A до C — 13 км, от B до C — 8 км, от B до D — 14 км. Найдите длину такого пути от A до D . Ответ обоснуйте.

6.3. В помещении банка находятся 12 закрытых сейфов, стоящих в ряд. Известно, что ближайшей ночью сотрудники банка откроют три соседних сейфа, и в средний открытый сейф положат слиток золота. Затем сейфы снова закроют. У имеющего доступ к сейфам начальника охраны имеется 6 одинаковых детекторов, каждый из которых, будучи помещенный на сейф, может определить, открывался этот сейф или нет. Может ли начальник охраны сегодня вечером разместить детекторы на сейфах так, чтобы на завтрашнее утро он по их показаниям определил, где лежит слиток золота? Ответ обоснуйте.

6.4. Можно ли прямоугольник размером 15 см \times 43 см разрезать без остатка на прямоугольники (не обязательно одинаковые) с целыми сторонами, у каждого из которых одна сторона больше другой ровно на 7 см? Ответ обоснуйте.

6.5. По кругу стоят 20 натуральных чисел (не обязательно различных). В каждой четверке подряд идущих чисел есть число, большее суммы трёх оставшихся. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих 20 чисел? Ответ обоснуйте.

7.1. Математик Иванов на 6 лет старше своей жены программиста Ивановой. Однажды Иванов обнаружил, что ровно половину своей жизни он провел в браке с Ивановой. Ровно через 14 лет после этого Иванова обнаружила, что она провела в браке с Ивановым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет математику Иванову и программисту Ивановой, когда он и она отпразднуют золотую свадьбу — пятидесятилетие своей супружеской жизни? Ответ обоснуйте.

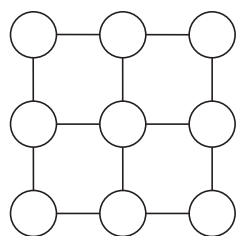
7.2. От бумажного квадрата отрезали прямоугольник площади 21, а затем от оставшейся части квадрата еще отрезали прямоугольник площади 12. В результате появился маленький квадрат. Какова его площадь? Ответ обоснуйте.

7.3. В кружке конструкторов занимаются 40 школьников. У каждого из них есть болтики, винтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество гвоздиков не равно количеству болтиков, ровно 15 человек. Школьников, у которых количество винтиков равно количеству гвоздиков, ровно 10. Докажите, что есть не менее 15 школьников, у которых количество винтиков не равно количеству болтиков. Ответ обоснуйте.



К условию задачи 7.4

7.4. Имеется полоска двустороннего скотча размером $7\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Её можно как угодно перегибать, но нельзя рвать. Как полностью обклеить ею поверхность деревянного кубика с ребром 1 см ? Укажите все места перегибов и развёртку полоски после них.



К условию задачи 7.5

7.5. Девять ячеек соединены отрезками так, как показано на рисунке. В этих ячейках записаны все натуральные числа от 1 до 9 (по одному числу в ячейке), но неизвестно, в какой ячейке какое число стоит. За один ход разрешается выбрать две ячейки, соединённых отрезком, и добавить к записанным в них числам по 1. Может ли случиться, что после нескольких операций все девять чисел, стоящих в ячейках, будут нацело делиться на 2025? Ответ обоснуйте.

7.6. Червяк считается *взрослым*, если его длина 1 метр. Взрослого червяка можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает 1 метра, он прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить десять взрослых червяков быстрее, чем за 1 час? Ответ обоснуйте. Не взрослых червей резать нельзя: обе части погибнут.

8.1. В школе количество мальчиков составляет 40% (соответственно, девочки составляют 60%). Когда заболели 30% всех её учеников, школу закрыли на карантин. Известно, что 40% заболевших — это девочки. Кого в школе на момент введения карантина было больше: здоровых мальчиков или заболевших девочек? Ответ обоснуйте.

8.2. Равнобедренный треугольник с углом в 120° сложен ровно из трёх слоев бумаги. Треугольник развернули — и получился прямоугольник. Нарисуйте такой прямоугольник и покажите пунктиром линия сгиба.

8.3. Действительные числа a и b таковы, что

$$a^2 - b^2 = a^3 + b^3 \quad \text{и} \quad a^3 - b^3 = a^4 + b^4.$$

Чему может равняться произведение ab ? (Найдите все возможные значения и докажите, что других нет.)

8.4. На круговой дорожке стадиона тренируются Валера на самокате и Серёжа на велосипеде. Скорость Серёжи в 1,65 раза больше скорости Валеры. Они стартовали из одной точки стадиона в одном и том же направлении и движутся с постоянными скоростями. В скольких разных точках дорожки происходят их встречи, если тренировка продолжается достаточно долго? Ответ обоснуйте.

8.5. На огромном экране компьютера выписаны всевозможные последовательности из восьми цифр от 00 000 000 до 99 999 999 (каждая последовательность выписана один раз). Красным шрифтом записаны те последовательности, у которых сумма всех цифр, стоящих на чётных местах, равняется сумме всех цифр, стоящих на нечётных местах. Курсивом записаны те последовательности, сумма всех цифр в которых в точности равна 36. Докажите, что последовательностей, записанных красным шрифтом, столько же, сколько записанных курсивом.

8.6. В прямоугольном треугольнике MNK точки P и T — середины гипотенузы NK и катета MK соответственно. Биссектриса угла MNK пересекает прямую PT в точке Q . Докажите, что треугольники KQM и NPQ подобны.

9.1. На доске записано число 20. Каждую минуту с числом, записанным на доске, проделывают одну из четырёх операций: число либо умножают на 2, либо делят на 2, либо умножают на 5, либо делят на 5. Результат операции выписывают на доску, а предыдущее число стирают. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 250.

9.2. Для квадратного трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами a и b при любом действительном значении x выполнено неравенство $p(x) \geq -0,9$. Докажите, что при любом действительном значении x выполнено и более сильное неравенство $p(x) \geq -0,25$.

9.3. Незнайка последовательно измерил расстояния от некоторой точки P внутри квадрата $ABCD$ до четырёх его вершин и получил числа 1 см, 4 см, 8 см, 7 см. Докажите, что Незнайка ошибся.

9.4. В школе прошёл однокруговой шахматный турнир (каждый участник сыграл с каждым ровно один раз). В нём участвовали и мальчики, и девочки, причём девочек было в 3 раза больше. За выигрыш давалось одно очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0 очков. После окончания соревнований оказалось, что девочки в сумме набрали на 20% очков больше, чем мальчики. Какое минимальное количество школьников могло участвовать в турнире?

9.5. Для какого наибольшего натурального числа n существует единственное натуральное число k , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{5}{6} < \frac{k}{n} < \frac{6}{7} ?$$

Ответ обоснуйте.

9.6. На разных сторонах прямого угла с вершиной O отметили точки A и B так, что $AO = OB$. Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри угла AOB и таких, из которых отрезки OA и OB видны под одинаковыми углами.

10.1. Решите систему уравнений относительно неизвестных x, y, z (a и b — параметры):

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

10.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BI и CJ внутренних углов B и C этого треугольника. Из произвольной точки M , лежащей на отрезке IJ , опущены перпендикуляры: MN на AB , MP на AC и MQ на BC . Докажите, что верно равенство $MN + MP = MQ$.

10.3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и для любого значения $x \in [-1; 1]$ имеет место неравенство

$$\left| ax + \frac{b}{2}(1 - x^2) \right| \leq \max\{a, b\}.$$

10.4. На рёбрах $AD, BC, CC_1, C_1D_1, A_1B_1, AA_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрали точки P, Q, R, S, T, U соответственно так, что

$$\begin{aligned} \angle PQB = \angle RQC, \quad \angle RSC_1 = \angle TSD_1, \quad \angle TUA_1 = \angle PUA, \\ \angle QRC = \angle SRC_1, \quad \angle STB_1 = \angle UTA_1, \quad \angle UPA = \angle QPD. \end{aligned}$$

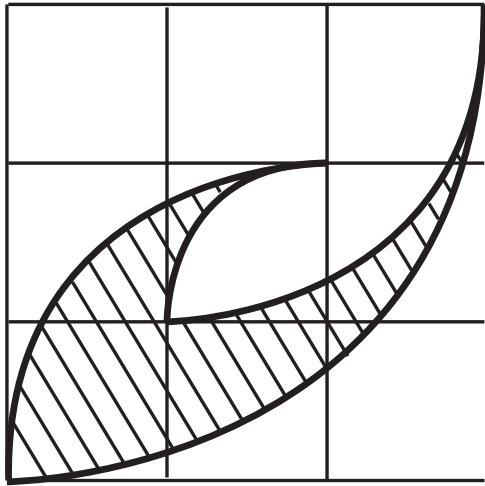
Найдите длину замкнутой ломаной $PQRSTUP$ если длина ребра куба равна 1.

10.5. Верно ли, что бесконечное множество квадратов со сторонами

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

можно разместить в большом квадрате со стороной 1 так, чтобы никакие маленькие квадраты между собой не пересекались?

10.6. Двадцать сосисок и десять сарделек соединили в одну незамкнутую цепочку в произвольном порядке. Владелец двух собак хочет перерезать цепочку в нескольких местах соединений так, чтобы можно было без дальнейших разрезов поделить сардельки и сосиски поровну между своими питомцами (т. е. по десять сосисок и по пять сарделек каждой собаке). Какого наименьшего числа разрезов ему заведомо хватит при любом расположении сарделек и сосисок в цепочке?



К условию задачи 11.1

11.1. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры (см. рисунок), границей которой является *круговой сплайн* — замкнутая непрерывная линия, составленная из дуг окружностей (с центрами в узлах сетки). Длина стороны клетки равна 1.

11.2. Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Действительные числа a, b, c попарно различны и таковы, что $P(a) = bc$, $P(b) = ca$, $P(c) = ab$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)} ?$$

Ответ обоснуйте.

11.3. У натурального числа n нашлись два различных натуральных делителя m и k , для которых выполнено равенство

$$k = \frac{n - m}{m - 5}.$$

Докажите, что число $\frac{n}{5}$ — целое и является квадратом натурального числа.

11.4. Из произвольной точки O , лежащей на грани ABC треугольной пирамиды $SABC$ провели прямые $OA_1 \parallel SA$, $OB_1 \parallel SB$ и $OC_1 \parallel SC$ (точки A_1, B_1, C_1 лежат на гранях SBC, SCA и SAB соответственно). Докажите равенство

$$\frac{OA_1}{SA} + \frac{OB_1}{SB} + \frac{OC_1}{SC} = 1.$$

11.5. Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырёх человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена, и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах. Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей? Ответ обоснуйте.

11.6. Известно, что числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ и $\sin 7x$ являются рациональными, и ни одно из них не равно 0. Докажите, что тогда число $\sin 12x$ также является рациональным.