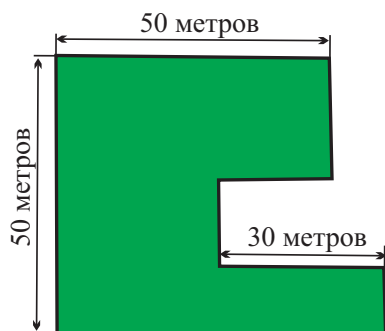


6.1. В одной сказочной стране в паспортном столе выходные дни: понедельник, среда, а также все числа месяца, которые не имеют других делителей кроме себя и единицы. Могут ли в некоторый момент года выходные в паспортном столе длиться больше десяти дней подряд? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 6.2

6.2. На рисунке изображена схема участка, огороженного по всему периметру забором. Найдите общую длину забора.

6.3. В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На линии есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь

через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка (через Зоопарк или не через Зоопарк) короче и во сколько раз? Ответ обоснуйте.

6.4. У аптекаря есть три гири, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г мёда, а третьему — 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар клал на другую. Могло ли оказаться, что каждая гирька легче 90 г? Ответ обоснуйте.

6.5. Каждый из шести рыцарей враждует ровно с двумя другими. Рыцари, враждующие между собой, хотят отравить друг друга. Докажите, что рыцарей можно рассадить за круглый стол так, что ни один из них не будет отравлен. Рыцарь может подсыпать яд только в бокал своего соседа.

7.1. От пункта A до пункта B 15 км. Из A в B в 9.30 отправился пешеход, идущий со скоростью 4 км/ч. На следующий день в 11 часов он отправился в обратный путь и шёл со скоростью 5 км/ч. Каждый раз он проходил по мосту, находящемуся на этой дороге, в одно и то же время. Определите показание часов при прохождении пешеходом моста.

7.2. Разрежьте бумажный квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и различными сторонами. Резать можно как угодно, а отрезанные куски можно переворачивать. Покажите, как разрезать, и обоснуйте, что из полученных трёх частей можно сложить требуемый треугольник.

7.3. Белоснежка попросила семерых гномов построиться по росту в колонну по одному: первый гном — самый высокий, последний — самый низкий. Шестеро гномов так и встали, но потом пришёл седьмой и встал позади одного из более низких гномов, тем самым нарушив требуемый порядок. Сколькими способами могли построиться гномы, если известно, что все они разного роста? Ответ обоснуйте.

7.4. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3, 4, ..., 9 даёт остатки 1, 2, ..., 7. Ответ обоснуйте.

7.5. Среди девяти внешне одинаковых монет восемь настоящих, а одна фальшивая — ровно на 1 г легче остальных. Есть трое чашечных весов, но одни из них сломаны — одна из чашек тяжелее другой на 1 г. Как с помощью четырёх взвешиваний определить фальшивую монету? Сломанные весы по внешнему виду отличить нельзя.

7.6. (*Фольклор.*) Альпинист с верёвкой длиной 80 метров находится на скале высотой 100 метров над землёй и хочет с помощью только одной этой верёвки спуститься вниз. На скале два колышка: один на вершине скалы, а другой — на выступе в 50 метрах от вершины. За колышки можно зацепить верёвку, а на выступе альпинист может стоять или сидеть, ни за что не держась. Кроме того, у альпиниста есть нож, позволяющий резать верёвку. Предположим, что Вы являетесь этим альпинистом. Предложите безопасный вариант спуска. Предполагается, что на скале Вы один; прыгать, летать и рвать на себе одежду не стоит.

8.1. Над трассой от пункта A до пункта B , протяжённостью 35 км, летят два квадрокоптера, отправленные из точки A . Скорость первого 10 км/ч, второго — 12 км/ч. Вдоль трассы установлены столбы (больше одного), над которыми квадрокоптеры зависают на **целое** число минут (над каждым столбом на одно и то же), причём второй квадрокоптер зависает на время, вдвое большее, чем первый. К конечной точке B они прилетают одновременно. Сколько столбов могло быть установлено вдоль трассы? Найдите все возможные варианты ответа и докажете, что других нет.

8.2. На даче у Валерия Трифоновича живет 198 котов. Все они имеют разный вес, а также разную скорость. Известно, что в любой группе из 100 котов самый толстый из них является одновременно и самым быстрым из них. Докажите, что можно так выбрать группу из 100 котов, что самый худой из них окажется одновременно и самым медленным.

8.3. Незнайка нарисовал трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD и утверждает, что для любой точки E , лежащей на боковой стороне CD имеет место неравенство $BE + AE > AC + BD$. Докажите, что Незнайка неправ.

8.4. Упростите дробь

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{25} + \sqrt{27}}$$

таким образом, чтобы в итоговом выражении символ квадратного корня встречался только один раз.

8.5. На стороне BC остроугольного треугольника ABC удалось выбрать точку D так, что $AB + BD = DC$. Известно, что угол B в два раза больше угла C . Докажите, что угол ADC равен 90° .

8.6. Есть 4 камня, каждый из которых весит целое число граммов. Есть чашечные весы (без гирь) со стрелкой, показывающей на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. (В частности, если на одной из чаш груза нет, весы показывают массу груза на второй чаше.) Можно ли узнать за 4 взвешивания точный вес каждого из камней, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибаться ровно на один грамм (неизвестно, в какую сторону)? Ответ обоснуйте.

9.1. Набор из трёх ненулевых чисел дважды подставили в качестве коэффициентов квадратного уравнения: сначала в одном порядке, потом в другом. Могло ли оказаться, что в первом случае полученное квадратное уравнение имеет два положительных корня, а во втором — два отрицательных? Ответ обоснуйте.

9.2. При проверке диктанта оказалось, что грубые ошибки у всего класса в сумме составляют более четверти всех ошибок. Если бы каждый ученик сделал в три раза больше грубых ошибок и на две больше негрубых, то число грубых ошибок стало бы ровно в 5 раз меньше числа негрубых. Докажите, что по меньшей мере треть класса написала диктант безошибочно.

9.3. Дан треугольник ABC , в котором $BC = 2AB$. Точка D — середина стороны BC , точка K — середина отрезка BD . Докажите, что $AC = 2AK$.

9.4. Знайка хочет написать на доске 100-значное натуральное число, а затем разбить его десятичную запись в одном месте (не перед цифрой 0) на два многозначных числа так, чтобы одно число являлось квадратом другого. Незнайка утверждает, что Знайке этого сделать не удастся. Прав ли Незнайка? Ответ обоснуйте.

9.5. В вершинах правильного шестиугольника со стороной 1 находятся нефтяные вышки. Требуется построить сеть дорог, чтобы по ним от каждой вышки можно было проехать к любой другой вышке. Обозначим через S минимально возможную сумму длин этих дорог. Докажите, что $S \leq 3\sqrt{3}$.

9.6. Докажите, что если сумма трёх дробей

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

(a , b и c — действительные числа) равна 1, то одна из этих дробей равна -1 , а две другие равны 1.

10.1. Трое друзей Сережа, Валера и Женя сыграли несколько партий в настольный теннис (в каждой партии двое играли, а один наблюдал за игрой). Количества партий, сыгранных Серёжей, Валерой и Женей, в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Всего друзьями было сыграно 30 партий. Сколько партий Серёжа сыграл с Женей? Ответ обоснуйте.

10.2. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в непараллельных плоскостях и имеют попарно непараллельные стороны. Прямые, соединяющие соответственные вершины (A с A_1 , B с B_1 и C с C_1), пересекаются в одной точке. Докажите, что продолжения соответственных сторон этих треугольников попарно пересекаются, и точки их пересечения лежат на одной прямой.

10.3. Решите уравнение

$$x^2 = a\sqrt{x^2 - b^2} + b\sqrt{x^2 - a^2}.$$

(a и b — неотрицательные действительные числа.)

10.4. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку E , а на стороне BC — точку K . Точку пересечения отрезков EC и AK обозначили буквой O . Оказалось, что площадь треугольника AEO равна 3, площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника OKC равна 2. Найдите площадь треугольника ABC . Ответ обоснуйте.

10.5. Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 = 1, \quad (2^{-n} - x_{n+1})(2^{-n} + x_n) = 4^{-n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Найдите сумму

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{100}}.$$

10.6. Группа шахматистов участвовала в нескольких турнирах (в каждом турнире число участников могло отличаться). По итогам каждого турнира были определены три лучших шахматиста (т. е. три призёра). Ни один шахматист не смог стать призёром сразу во всех турнирах. Но в любых двух турнирах нашёлся ровно один участник, который смог стать призёром в обоих турнирах. Докажите, что наибольшее количество турниров, в которых могли принять участие шахматисты, равно семи.

11.1. Пусть $P(x) = x^2 - 38x - 80$. Решите уравнение

$$P(x) = P\left(\frac{x+4}{x+1}\right).$$

11.2. Пусть площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь её наибольшая диагональ?

11.3. У фокусника есть 25 цилиндров, ровно в двух из которых сидит по одному кролику. За один вопрос можно указать на один или два цилиндра и спросить, сидит ли там хотя один кролик (фокусник честно Вам ответит «да» или «нет»). За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно найти хотя бы один цилиндр с кроликом? Ответ обоснуйте.

11.4. Пусть $x, y, z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin z, \\ \cos x \sin y = \cos z. \end{cases}$$

11.5. В каждую грань треугольной пирамиды вписали окружность. Оказалось, что все четыре вписанных окружности попарно касаются друг друга. Затем из центра каждой окружности построили перпендикуляр к той грани пирамиды, в которой находится эта окружность. Докажите, что все четыре построенных перпендикуляра пересекаются в одной точке.

11.6. 9 шахматистов сыграли двухкруговой шахматный турнир: в каждом круге каждый участник сыграл с каждым одну партию. Известно, что после первого круга у всех участников было разное количество очков. Могло ли так случиться, что по окончании турнира у всех участников снова было разное количество очков, но при этом шахматисты расположились (по количеству набранных очков) в порядке, обратном тому, какой был после первого круга. Ответ обоснуйте. В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0 очков.